4П

УДК 519.1

В.І. Петренюк
Кіровоградський національний технічний університет, м. Кіровоград, Україна

Структура площинних графів із множиною точок, досяжною на торі. Частина ІІ

Вивчення структури площинних графів, що мають певну множину точок X, таку, що $t_G(X) > 1$ і досяжну на торі δ_1, є метою цієї статті, яка є продовженням частини І. Основний результат – наявність у такому графові принаймні двох та не більше трьох підграфів (гомеоморфних графу $K_{2,3}$ чи K_4 без спільних циклів), які разом із множиною точок X повинні задовольняти одному з п'яти варіантів, описаних у частині І цієї статті.

Вступ

Розглянемо задачу побудови скінченного простого графа G, G = (V,E) із заданими наперед родом P та числом досяжності R множини вершин, де P, R > 0. У світлі теорії мінорів Сеймура та Робертсона, яка спирається на теорему, за якою для заданого графа із нескінченної множини скінченних графів знайдеться інший граф, що буде мінором заданого графа. Відзначимо, що мінор означатиме результат виконання операцій стягування в точку чи видалення певної послідовності ребер скінченного простого графа G доти, доки його сутність пов'язана із поставленою задачею. А саме для випадку нашої задачі із параметрами P = 1, R = 1 такими є графи Куратовського-Понтрягіна $K_{3,3}$ та K_5. Згідно з [1] наш спосіб побудови полягатиме в заміні деяких ребер u_i (чи їхньої частини) графа G' гомеоморфного $K_{3,3}$ чи K_5, на графи $K_{2,3}$ та K_4, які приєднуються до графа G\u_i, де i = 1,2,..m, шляхом ототожнення граничних вершин (чи двох внутрішніх точок) довільного ребра u_i із двома заданими вершинами графів $K_{2,3}$ чи K_4. Точніше будемо розглядати такий спосіб приєднання як одне φ-перетворення графів G' та H на граф G, де H = $K_{2,3}$ чи H = K_4, визначене за двома точками, розуміючи під точкою або кінцеву вершину ребра, або внутрішню точку ребра. Матимемо твердження: якщо площинний граф G отриманий зазначеним вище способом, то число досяжності множини вершин не перевищуватиме m + 1.

Основна частина

Метою статті є продовження вивчення властивостей площинних графів, що мають деяку множину точок X, таку, що $t_G(X) > 1$ і досяжну на торі δ_1. Основні визначення та позначення взяті з [2-4]. Під точкою графа будемо розуміти або його вершину, або деяку точку його ребра. Позначення і визначення, а також нумерація лем узяті із частини І.

Надалі будемо вважати, що G – блок, а вкладення $f, f: G \to \delta_0$ реалізує число досяжності $t_G(X)$, де $t_G(X) = t$, $\theta_G(X)$ – характеристика множини X, наведена в [5]. Вважатимемо, що $\theta_G(X) = 0$. Через s_0 – позначимо зовнішню грань графа $f'(G)$. Будемо позначати через $f, f: G \to \delta_1$ таке вкладення, при якому множина X досяжна на торі δ_1.

Лема 4. Нехай виконується підвипадок а3) із частини І та зберігаються позначення, прийняті в лемі 2 частини І. Тоді мають місце наступні твердження:

0) Виконуються твердження леми 2, причому, якщо підграфи F_1, F_2 графа G задовольняють співвідношенню $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ та має місце твердження 3) леми 2 частини І.

1) Нехай виконується умова: $(\exists i)(z_i \cap (F_1 \cap F_2) \neq \emptyset)$. Тоді мають місце наступні твердження:

1.1) Якщо існує простий цикл z', z'∈F_1, такий, що задовольняє умові:

а) $z \cap z' = F_1 \cap z' = C_G(a_{11}, a_{12})$, де $a_{11} \in ds_1 \cap z', a_{12} \in ds_3 \cap z', z' \in \{z_i\}_1^2$, то має місце наступне включення: $f(X \cap (U_1^3 ds_i)) \subset (U_1^2 ds_i \setminus U_1^2 F_i) U (z \cap (U_1^3 ds_i)$;

1.2) Якщо такого циклу не існує, то має місце твердження 3) леми 2 частини І.

1.3) Якщо існує пара простих циклів $z_i' \subset F_1$, i = 1,2, яким притаманна властивість: $(\forall i)(z'_i, z'_i = F_1 \cap z' = C_G(a_{i1}, a_{i2}))$, де $a_{11} \in ds_2 \cap z_1, a_{12} \in ds_3 \cap z_1, a_{21} \in ds_1 \cap z_2, a_{22} \in ds_3 \cap z_2$, $z' \in \{z_j\}_1^2 \cap z$, то виконується співвідношення:

$$f(X \cap (U_1^2 ds_i)) \subset (U_1^3 ds_i \setminus U_1^2 F_i) U (U_1^2 (z_i' \cap (U_1^3 ds_j)))$$

2) Нехай виконується співвідношення: $(\forall k, k' = 1,2)[F_1^0 \cap F_2^0 \cap z_k^0 = \{b_{k'}\} \& F_k^0 \cap z_{k'}^0 = \{b_{k'}\}]$. Тоді мають місце наступні твердження:

2.1) Якщо існує пара простих циклів $z'_i, z'_i \subset F_i$, i=1,2, яка задовольняє співвідношенню а) $(\forall i,i')(i,i' = 1,2)[((z'_i \cap z_i = F_i \cap z = C_G(a_i, b_j))\&(|(z'_i)^0 \cap z^0| <= 1)]$.

$$(\forall i,i')(i,i' = 1,2)[((z'_i \cap z_i = F_i \cap z = C_G(a_i, b_j))\&(|(z'_i)^0 \cap z^0| <= 1)],$$

де $a_1 \in ds_1 \cap z_1 \cap F_1, a_2 \in ds_3 \cap z_2 \cap F_2$, то має місце включення:

$$f(X \cap (U_1^3 ds_i \setminus U_2^1 F_i) U (U_1^3 (z'_i \cap (U_1^3 ds_j))).$$

2.2) Існує принаймні один із наведених вище циклів z', z'⊂F_1, який задовольняє співвідношенню (а), та має місце включення:

$$f(X \cap (U_1^3 ds_i)) \subset (U_1^3 ds_i \setminus U_1^2 F_1) U (z' \cap (U_1^3 ds_j))).$$

Примітка. Наведені вище твердження виконуються із точністю до перенумерації клітин s_i, i = 1, 2, 3, причому один з підграфів F_1, F_2 може бути тривіальним.

Доведення. Нехай має місце підвипадок а3). Доведення тверджень 0), 1) аналогічне наведеному вище доведенню тверджень 0), 1), 2) леми 2 частини І. Доведемо твердження 2). Нехай виконується співвідношення, вказане в умові твердження 2). Це означає, що підграфи F_1, F_2 графа G мають дві спільні вершини b_1, b_2, такі, що належать до z_k. Наведемо доведення частин 2.1), 2.2) твердження 2).

Доведемо 2.1). Нехай існує пара простих циклів z'_i, $z'_i \subset F_i$, де i = 1,2, які задовольняють умові:

$$z_1 \cap z'_2 = F_2 \cap z_1 = C_G(b_1, a_2),\ |(z'_2)^0 \cap z_2^0| \leq 1,$$

де

$$(\{a_1\} = ds_1 \cap z_1 \cap F_1, \{a_2\} = ds_3 \cap z_2 \cap F_2)\&(z'_1 \cap z_2 = F_2 \cap z_2 = C_G(b,a) \setminus (z')^0 \cap z^0).$$

Згідно з умовою випадку А та досяжності множини $X_1 \cap (U ds_i)$ на торі δ_1 отримаємо, що вкладення f, f:X→δ_1, маємо наступні властивості:

1) Кожен простий цикл z_i, $z_i \subset ds_i U f | F(F \setminus z_i)$ стягується або до однієї і тієї геодезичної кривої тора, або стягується в точку.

2) $f(z'_i)$ – простий цикл, стягнутий до другої геодезичної кривої тора, відмінної від тієї, до якої стягується простий цикл z, де $z_i \subset ds_i^1 U f | F_i^1 (F_i \setminus (z'))$, i = 1,2. Тоді має місце включення: $f(X U(U_1^3 ds_i)) \subset (U_1^2 ds_i \setminus U_1^2 F_i) U(U_1^2 (z' \cap (U_1^2 ds_j))$.

Твердження 2.1) доведено.

Доведемо твердження 2.2). Для цього покажемо, що існує простий цикл, який задовольняє співвідношенню (а). Якщо припустити, що такого циклу немає, то в силу умови випадку А та досяжності на δ_1 множини $X_1 \cap U_1^3 ds_i$ отримаємо наступне: вкладення $f|_{Fi}:F_i \to \delta_1$ працює так, що кожен простий цикл z, $z \in ds_i U f|F_i (F_i)$, де i = 1,2, буде стягуватися або до однієї і тієї геодезичної кривої тора, або в точку. З цього випливає співвідношення:

$$f(X_1 \cap (U_1^3 ds_i)) \cap ds_2 = \varnothing.$$

Отримаємо суперечність визначенню числа $t_G(X)$; наше припущення неправильне. Тобто існує принаймні один простий цикл z'_1, z'_1 належить F, який задовольняє співвідношенню (а). Користуючись наведеним вище при доведенні 2.1), можливо показати, що має місце включення:

$$f(X_1 \cap (U_1^3 ds_i)) \subset (U_1^3 ds_i \setminus U_1^2 F) U (z' \cap U_1^3 ds_j).$$

Доведення 2.2) закінчено. Лема 4 доведена.

Лема 5. Нехай має місце випадок Б із частини І та мають місце позначення, прийняті вище. Тоді виконуються наступні твердження:

0) Справедливі твердження 0), 1), 2) леми 2, причому маємо, що

$$(ds_1 \cap ds_2 \neq \varnothing)\&(ds_2 \cap ds_3 <> \varnothing)\&(ds_1 \cap ds_3) = \varnothing);$$

1) Якщо виконується співвідношення:

$$(F_1 \cap F_2 = \varnothing)\&[(\forall j)(\exists i)(z_i \cap F_j = \{a_{ij}\})\&(ds_2 \cap z_i^0 = C_G^0(a_{i1}, a_{i2}))],$$

то має місце включення:

$$f(X_1 \cap U_1^3 ds_i) \subset U_1^3 ds_i \setminus U_1^2 F_j) U (ds_2 \setminus C_G(a_{i1}, a_{i2})) \setminus \{a_{ij}\}_{j=1}^{2};$$

2) нехай $F_1 \cap F_2 < \varnothing$, $C' = C_G(a_{i1}, a_{i2}) \setminus \{a_{ij}\}_{j=1}^{2}$;

2.1) Якщо виконуються наступні співвідношення:

а) $(\exists i)(i = 1,2)(F_1^0 \cap F_2^0 \cap z_i^0 = \{a_i\} = F_1^0 \cap z_i^0)$;

б) існує простий цикл z, $z \subset F_2$, такий, що $z \cap z_i = F_2 \cap z_i$, то маємо включення: $f(X \cap U_1^3 ds_i) \subset (U_1^3 ds_i \setminus U_1^2 F_j) U (ds_2 \setminus C') U (z \cap U_1^3 ds_i)$;

2.2) Якщо одне зі співвідношень а), б) з (2.1) не виконується, то має місце включення, наведене в 1).

Примітка. Наведені вище твердження правильні з точністю до перенумерації клітин s_i, i = 1,2,3, причому один з графів може бути тривіальним.

Доведення. Нехай має місце випадок Б. Вважатимемо, що границі 2-клітин s_1, s_2 стягуються до a, а ds_3 стягується до b, де a, b – геодезичні криві тора δ_1. В силу леми 1 маємо, що клітина s_2 має спільні точки з клітинами s_1, s_3, причому $ds_1 \cap ds_3 = \varnothing$. Крім цього, виконується очевидне співвідношення:

$$(\exists i, i=1,2)((ds_1 \cap z_i = \{a_i\}_1^2)\&(ds_2 \cap z_j = \{a_i\}_2^3), \text{ де } C = C_G(a_{i1}, a_{i2}), C \subset z_i \cap ds_2.$$

Дійсно, якщо припустити, що це співвідношення не виконується, тоді отримаємо, що при довільному вкладенні f:G → δ_1 кожен простий цикл одного з підграфів F_1Uds_1, F_3Uds_3 графа G стягуватиметься в точку. Це суперечить умові випадку Б. Припущення неправильне. Співвідношення має місце.

Неважко впевнитися у справедливості тверджень 0), 1), 2) леми 2 для випадку Б.

Доведемо твердження 1). Припустимо, що $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ та позначимо через C, $C = C_G(a_{i1}, a_{i2})$, простий ланцюг графа G такий, що $C = z_i \cap ds_2$. Згідно з умовою

досяжності множини $X\cap(Uds_i)$ на торі та умовою випадку Б існує вкладення $f: G\to\delta_1$, яке має наступні властивості:

1) кожний простий цикл z, $z\in UF_i\ Uds_1Uds_3$ стягується або в точку, або до геодезичної кривої a;

2) границя ds_3 стягується до геодезичної кривої b. Тоді маємо включення:

$$f(X\cap U_1^3 ds_i)\subset(U_1^3 ds_i \setminus U_1^2 F_j)\ U\ ((ds_2\setminus C(a_{i1},a_{i2}))\setminus\{a_{i1},a_{i2}\},$$

що й треба довести.

Доведемо твердження 2). Нехай $F_1\cap F_2\neq\varnothing$, $C'=C_G(a_{i1},a_{i2})\setminus\{a_{i1},a_{i2}\}$. Доведемо 2.1). Нехай виконується співвідношення а), б). Для визначеності покладемо, що $z_1^0\cap(F_1^0\cap F_2^0)=F_1^0\cap z_1^0=\{a_1\}$. Розглянемо вкладення f: $G\to\delta_1$, наведене при доведенні твердження 1, та впевнимося в тому, що має місце включення:

$$f(X\cap U_1^3 ds_i)\subset(U_i^3 ds_i\setminus U_1^2 F_j)\ U\ (ds\setminus C)\ U\ (z\cap U_1^3 ds_i).$$

Частина 2.1) доведена. Подібним чином можливо довести частину 2.2). Таким чином, твердження 2) вважаємо доведеним. Доведення леми 5 закінчено.

Пропозиція 1. Нехай X – множина точок площинного графа G, яка має число досяжності t, t ≠ 3, та характеристику $\theta_G(X)$, $\theta_G(X)=0$, $S_G(X)=\{s_i\}_1^3$, $X'=X\cap(U_1^3 ds_i)$. Якщо множина X' досяжна на торі δ_1, то мають місце наступні твердження:

0) Для кожної пари (s_i,s_j), i < j, i,j = 1, 2, 3 існує підграф H_{ij} графа G, який разом з підмножиною $X\cap(ds_i\ U\ ds_j)$ множини X задовольняє властивостям 1, 2, 3, наведеним в позначенні 1 [6],

1) Існують пари (z_1, z_2), (F'_1, F'_2), де z_1, z_2 прості цикли найменшої довжини $F'_i=\{F_1,F_2\}$, які задовольняють відношенню: $(\forall i,j)(i,j=1,2)(\exists(F,F),F_j\in\{F_k\}_1^3,[z_i\cap F_j\neq\varnothing]$.

2) Існує пара різних найкоротших простих ланцюгів C_i, i = 1, 2, графа G, $C_i = C_G(a_{i1},a_{i2})$, які мають властивість: існує простий ланцюг C, $C\ \cap U_1^2 F'_i$, де пара (F'_1, F'_2) задовольняє співвідношенню з 1), такий, що пара (C,C_i) розділяє на площині деякі елементи множини X', які належать до простого циклу z графа G.

3) Має місце включення:

а) $f(X')\subset(U_1^3 ds_i\setminus U_1^2 F'_i)\ U\ K\ U\ M$,
де $z = Uds_i\setminus UF'_i$,
$K=U(z_i^0\cap U_1^3 ds_j\cap F'), M=U_1^3 ds_i\setminus U_1^2 F'_i$;

б) $f(X')\subset(U_{i=1}^2 ds_i\setminus U_{i=1}^2 F'_i)\ U\ (U_{i=1}^2 z'_i\cap(U_1^2 ds_j\cap F'_i))\ U\ K$,
де $z'_i\subset F'_2$, z'_i – простий ланцюг графа G. Ці обидва включення складають випадок А;

в) $f(X')\subset M\ U\ K\ U\ (ds_2\setminus(ds_2\cap z_j))$, де $z_j\in\{z_1, z_2\}$;

г) $f(X')\subset MUKU(ds_2\setminus(ds_2\cap(ds_2\cap z_j))U(z'\cap U_1^3 ds_i)$,
де $z'\subset F'_2$, z' – простий цикл графа G. Ці обидва включення складають випадок Б. Доведення пропозиції 1 випливає із наведених вище лем. Включення а), б) випливають із лем 2, 3, 4, а включення в), г) випливають із леми 5.

Лема 6. Нехай X – скінченна множина точок плоского графа G, $t_G(X)=t, t>3$, $\theta_G(X)=0$, $S_G(X)=\{s_i\}_1^t$, задано вкладення f, f:$G\to\delta_1$, реалізує $t_G(X,\delta_1)$, M = $\{F_{ij}\}$ –

множина всіх підграфів графа G, які задовольняють позначенню 3. Якщо множина X досяжна на торі δ_1, то мають місце наступні твердження:

1) Існують прості цикли z_1, z_2 графа G, що мають найменшу довжину та разом з трійкою (F'_1, F'_2, F'_3) задовольняють співвідношенню: $z_i \cap F'_j = C_{ji}$, де C_{ji} – простий ланцюг графа G (можливо, вироджений в точку), $F'_j \in M$;

2) Існують прості ланцюги C_1, C_2 найменшої довжини, що мають властивість: існує простий ланцюг C_1, $C \subset U_1^3 F'_i$, такий, що пара (C,C_1) розділяє на площині деякі елементи множини $X \cap z$, де z – простий цикл графа G, $z = (U_1^4\ ds_i \setminus U_1^3\ F'_i)\ U\ U_1^3\ (z \cap F'_i)$, $\{F'_i\}$ – множина підграфів графа G, яка задовольняє твердженню 1 цієї леми);

3) Виконується співвідношення: $[(t = 4)\&(X3 \underset{"s}{U} F'_i) = X3(\underset{"i}{U} F_i)3(U_1^2\ z_i)]$.

Доведення. Нехай X – скінченна множина точок площинного графа G, де $t_G(X) = t$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, $\theta_G(X) = 0$ та виконані прийняті вище позначення. Вважатимемо, що множина X досяжна на δ_1. Розглянемо твердження 1). Доведемо існування простих циклів z_i найменшої довжини, які разом з трійкою (F'_1,F'_2,F'_3) підграфів графа G, де $F'_i \in \{F_j\}_1^4$, мають властивість: $(\forall\ i,j\ )(i=1,2)(j=1(1)4)[\ F'_j \cap\ z_i\ = C_{ji}]$, причому C_{ij} – прості ланцюги графа G' (можливо, вироджені в точку), які задовольняють умовам:

$$\sum_{i=1}^{2} C_{1i} = ds_{12} \setminus U_1^2\ ds_i, \sum_{i=1}^{2}\ C_{2i} = ds_{23} \setminus U_2^3 ds_i, \quad \sum_{i=1}^{2} C_{3i} = ds_{34} \setminus U_1^4 ds_i\ , \sum_{i=1}^{2} C_{4i} = ds_{14} \setminus U_1^4\ ds_i,$$

де s_{ij} – зовнішня грань графа $f|(F_{ij})$. Будемо позначати через F_i, i = 1(1)4, відповідно, підграфи F_{12}, F_{23}, F_{34}, F_{14} графа G.

Згідно з умовою $\theta_G(X) = 0$ та лемою 1 частини I маємо, що границя кожної клітини s_i стягується до однієї і тієї замкнутої кривої, припустимої до a. З умови досяжності множини X на δ_1 випливає існування простих циклів z_1, z_2 графа G, таких, що $\sum_{j=1}^{4} C_{ij} \subset z_i\ , i = 1,2$. Дійсно, вкладення f, f:G→δ_1 діє так, що кожен простий цикл підграфа $f\ (\ F_{ij}\ U\ (\ ds_i U\ ds_j))$ графа G, i < j, i,j = 1(1)4 має своїм образом криву, стягнуту або в точку, або до a – геодезичної кривої тора. Таке вкладення можливе тільки тоді, коли існують прості цикли z_1, z_2, які разом з трійкою (F'_1, F'_2, F'_3) підграфів графа G, де $F'i \in \{F_j\}_1^t$, задовольняють співвідношенню, описаному в умові до твердження 1). Доведення твердження 1) закінчено.

Доведення твердження 2) подібне доведенню твердження 2) леми 2 частини I. Доведемо твердження 3). З наведених вище тверджень 1), 2) та леми 1 частини I випливає, що серед клітин з $\{\ s_i\}_1^t$ існує пара клітин, що не перетинаються між собою. Тоді при довільному вкладенні f, f: G -> δ1, при якому множина досяжна на торі, кожна $f(ds_i\ )$, i = 1(1)t може стягуватися до однієї і тієї геодезичної кривої тора. Вважатимемо, що $F_t = F_{1\ t}$. Оскільки $t_G(X,\delta_1) = 1$ та границя кожної клітини $f(ds_i)$ стягується до кривої a, то має виконуватися співвідношення $(\ \forall F')(F' \in \{F_j\} \setminus \{F_t\})[X \cap\ F' = X \cap\ F'\ \cap (U_1^2\ z_i)]$. Доведемо нерівність $t <= 4$. Припустимо, що $t > 4$. Тоді маємо включення: $f(X) \subset\ ds_1\ U\ ds_t\ \ U\ (U_1^2\ z_i)$, яке суперечить припущенню про $t > 4$. Припущення неправильне. Нерівність доведена. Таким чином доведено твердження 3). Доведення леми 6 закінчено.

Пропозиція 2. Нехай X – скінченна множина точок площинного графа G, $t_G(X) = t$, $\theta_G(X) = 0$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$ та задано вкладення f, f: G→δ_1, при якому множина X досяжна на торі δ_1. Мають місце наступна нерівність та твердження:

1) $3 \le t \le 4$;
2) Якщо t = 3, то має місце теорема 1;
3) Якщо t = 4, то має місце лема 6.

Теорема 1. Нехай X – множина точок площинного графа G, що має число досяжності t, t = 3, та $\theta_G(X) = 0$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, $X' = X \cap (U_1^3 ds_j)$. Якщо мають місце твердження 0), 1), 2), 3) пропозиції 1, то множина X досяжна на торі δ_1.

Наслідок. Якщо X – скінченна множина точок площинного блока G, де $t_G(X) = t$, $t > 3$, $\theta_G(X) = 1$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^4$, та задано вкладення f': G -> δ_1, що реалізує $t_G(X)$, M = $\{H_{ij}\}$ множина всіх підграфів H_{ij} графа G, які задовольняють визначенню 3, то має місце нерівність: $t_G(X,\delta_1) > 1$.

Висновки

Отримані результати мають бути використані в теоретичних розробках щодо конструювання простих графів заданого роду та досяжності певної множини точок графа.

Література

1. Петренюк В.І. Новий підхід до подання графів // Збірник праць 4-го міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». – Кіровоград, 18-17.10.2007. – С. 112.
2. Хоменко Н.П. Топологические аспекты теории графов: Препр. / ИМ АНУ. – Киев, 1971.
3. Хоменко М.П. φ -перетворення графів: Препр. / ИМ АНУ. – Киев, 1973.
4. Петренюк В.І. Структура площинних графів із множиною точок, досяжною на торі. Частина І // Штучний інтелект. – 2008. – № 3.
5. Хоменко Н.П., Островерхий Е.Б. Существенные элементы и род графа: Препр. «Минимальные вложения графов» / ИМ АНУ. – Киев, 1972.
6. Петренюк В.И. О структуре плоских графов с заданным числом досягаемости заданного множества точек. – Деп. в УкрНИИТИ № 2245-Ук86 22.09.1986.
7. Петренюк В.И. Об оценке рода специальных графов. – Деп. рукопись в УкрНИИТИ № 2259-Ук86 22.09.1986.

В.И. Петренюк

Структура плоскостных графов со множеством точек, досягаемым на торе. Часть II

Изучение структуры плоскостных графов, которые имеют определенное множество точек X, такое, что $t_G(X) > 1$, досягаемое на торе δ_1, является целью это статьи, которая представляет собой продолжение части I. Основной результат – наличие в таком графе по крайней мере двух и не более трех подграфов (гомеоморфных графу $K_{2,3}$ или K_4 без общих циклов), которые вместе со множеством точек X должны удовлетворять одному из пяти вариантов, описанных в части I этой статьи.

Стаття надійшла до редакції 09.07.2008.